

# آموزش ترجمه متون ریاضی

## «اگر و فقط اگر»

یا

## «قضیه‌های هم‌ارز»

### "IF AND ONLY IF" OR "EQUIVALENCE THEOREMS"

Statements including the expression "if and only if" are rather common and very useful in mathematics. If we can show that "A if and only if B", we are proving that A and B are equivalent statements, because either one of them is true (or false) only when the other one is true (or false). The statement "A if and only if B" means that "A is a necessary and sufficient condition for B" and that at the same time "B is a necessary and sufficient condition for A."

Thus to prove that the statement "A if and only if B" is true, we must prove that:

1. If A, then B.

(A is a sufficient condition for B; B is a necessary condition for A.)

2. If B, then A.

(B is a sufficient condition for A; A is a necessary condition for B).

Therefore, the proof of an "if and only if" statement has two parts. We can use any one of the techniques we know to construct each part.

Notice that the statements "If A, then B" and "If B, then A" are converses of each other.

گزاره‌های دارای اصطلاح «اگر و فقط اگر» نسبتاً متداول و در ریاضیات بسیار سودمند هستند. اگر ما بتوانیم نشان دهیم که «A اگر و فقط اگر B» ثابت کرده‌ایم که A و B گزاره‌هایی هم‌ارز هستند، زیرا وقتی یکی از آن‌ها درست (یا نادرست) باشد، دیگری نیز درست (یا نادرست) است. گزاره «A اگر و فقط اگر B» به این معنی است که «A شرط لازم و کافی برای B است» و در عین حال «B شرط لازم و کافی برای A است.» بنابراین برای اثبات درستی گزاره «A اگر و فقط اگر B» ما باید ثابت کنیم که:

۱. اگر A آن‌گاه B.

(A یک شرط کافی برای B است؛ B

یک شرط لازم برای A است.)

۲. اگر B آن‌گاه A.

(B یک شرط کافی برای A است؛ A

یک شرط لازم برای B است.)

بنابراین اثبات یک گزاره «اگر و فقط اگر» دارای دو قسمت است. می‌دانیم ما می‌توانیم با به‌کار بردن هر یک از این تکنیک‌ها (روش‌ها) هر قسمت را بسازیم. توجه کنید که گزاره‌های «اگر A، آن‌گاه B» و «اگر B، آن‌گاه A» عکس یکدیگرند.



## ابهام در نمادگذاری!

اگر  $A = \{4, 6\}$  و  $B = [4, 6]$  ،  $A \times B$  کدام است؟!

الف)  $A \times B = 2 \times 12 = 24$

ب)  $A \times B = \{(x, y) \mid 4 < x < 6 \text{ و } 4 \leq y \leq 6\}$

## پرسش‌های پیکار جو!



چند جمله‌ای  $f$  با ضرایب صحیح مفروض است. می‌دانیم  $f(2)$  بر ۵ و  $f(5)$  بر ۲ بخش پذیر است. در این صورت  $f(7)$  بر کدام بخش پذیر است؟

- |         |      |      |
|---------|------|------|
| الف) ۱۰ | ب) ۷ | ج) ۳ |
| د) ۴    | ه) ۸ |      |

## لغات و اصلاحات جدید

1. گزاره‌ها Statements
2. اصطلاح Expression
3. اگر و فقط اگر If and only if
4. مفید، سودمند Useful
5. هم‌ارز Equivalent
6. لازم Necessary
7. کافی Sufficient
8. شرط Condition
9. شکل دادن، ساختن Construct
10. عکس Converse

## ترجمه برای دانش آموز

**EXAMPLE 1.** A nonzero real number is positive if and only if its reciprocal is positive.

*Proof.* The two parts of this statement are the simple statements

**A:** A real number  $a$  is positive.

**B:** The reciprocal of  $a$ , denoted as  $a^{-1}$ , is positive

**Part 1. If A, then B.**

(The fact that the number  $a$  is positive is sufficient to imply that its reciprocal is positive.) By definition of reciprocal

$$a * a^{-1} = 1.$$

So the number  $a * a^{-1}$  is positive.

By the properties of operations of real numbers, the product of two numbers is positive only if the two numbers are either both positive or both negative. Because by hypothesis  $a$  is positive, it follows that  $a^{-1}$  is positive.

**Part 2. If B, Then A.**

(The fact that the number  $a$  is positive is necessary to imply that its reciprocal is positive.) By definition of reciprocal

$$a * a^{-1} = 1$$

So the number  $a * a^{-1}$  is positive.

By the properties of operations of real numbers, the product of two numbers is positive only if the two numbers are either both positive or both negative. Because by hypothesis,  $a^{-1}$  is positive, it follows that  $a$  is positive.